Set Theory HW 1

Toby Aldape

February 2021

1 Proof of ρ

In section 1, we prove $\vdash \rho$, where

$$\rho \equiv \neg\exists s \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x).$$

We have

$$\begin{aligned}
\{\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x), \neg s \notin s\} \vdash & \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin s), \\
& \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x) \rightarrow (s \in s \leftrightarrow s \notin s), && \text{(Ax2)} \\
& s \in s \leftrightarrow s \notin s, && \text{(MP)} \\
& (s \in s \leftrightarrow s \notin s) \rightarrow (s \in s \rightarrow s \notin s), && (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi), \text{(Ax1)} \\
& s \in s \rightarrow s \notin s, && \text{(MP)} \\
& \neg s \notin s, \\
& \neg s \notin s \rightarrow s \in s && \neg\neg\phi \rightarrow \phi, \text{(Ax1)} \\
& s \in s && \text{(MP)} \\
& s \notin s. && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

By the contradiction metatheorem,

$$\{\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x)\} \vdash s \notin s. \tag{1}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\{\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x), s \notin s\} \vdash & \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x), \\
& \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin s) \rightarrow (s \in s \leftrightarrow s \notin s), && \text{(Ax2)} \\
& s \in s \leftrightarrow s \notin s, && \text{(MP)} \\
& (s \in s \leftrightarrow s \notin s) \rightarrow (s \notin s \rightarrow s \in s), && (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi), \text{(Ax1)} \\
& s \notin s \rightarrow s \in s, && \text{(MP)} \\
& s \notin s, \\
& s \in s. && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

By the contradiction metatheorem,

$$\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x) \vdash s \in s. \tag{2}$$

Applying the contradiction metatheorem to equations (1) and (2),

$$\vdash \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x).$$

By the generalization metatheorem,

$$\begin{aligned}
\vdash & \forall s \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x), \\
& \forall s \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x) \rightarrow \neg\neg\forall s \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x), && \phi \rightarrow \neg\neg\phi, \text{(Ax1)} \\
& \neg\neg\forall s \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x). && \text{(MP)}.
\end{aligned}$$

But

$$\neg\neg\forall s \neg\forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x) \equiv \neg\exists s \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x) \equiv \rho. \tag{3}$$

2 Proof of σ

For this proof, we work in a language with the constant symbol c.

$$\sigma \equiv \neg\exists v \forall x (x \in v)$$

We have

$$\begin{aligned}
\forall z(z \in c) \vdash & \forall z(z \in c), \\
& \forall z(z \in c) \to z \in c, && \text{(Ax2)} \\
& z \in c, && \text{(MP)} \\
& z \in c \to (z \notin z \to z \in c), && \phi \to (\psi \to \phi), \text{(Ax1)} \\
& z \notin z \to z \in c, && \text{(MP)} \\
& (z \notin z \to z \in c) \to (z \notin z \to (z \in c \wedge z \notin z)), && (\phi \to \psi) \to (\phi \to (\psi \wedge \phi)), \text{(Ax1)} \\
& z \notin z \to (z \in c \wedge z \notin z), && \text{(MP)} \\
& (z \in c \wedge z \notin z) \to z \notin z && (\phi \wedge \psi) \to \psi, \text{(Ax1)} \\
& (z \notin z \to (z \in c \wedge z \notin z)) \\
& \to (((z \in c \wedge z \notin z) \to z \notin z) \to (z \notin z \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))), && (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to (\phi \leftrightarrow \psi), \text{(Ax1)} \\
& ((z \in c \wedge z \notin z) \to z \notin z) \to (z \notin z \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)), && \text{(MP)} \\
& z \notin z \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z), && \text{(MP)} \\
& (z \notin z \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \\
& \to ((z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to (z \in y \leftrightarrow z \notin z)), && (\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\tau \leftrightarrow \psi) \to (\tau \leftrightarrow \phi)), \text{(Ax1)} \\
& (z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to (z \in y \leftrightarrow z \notin z). && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

By the generalization metatheorem,

$$\begin{aligned}
\{\forall z(z \in c)\} \vdash & \forall z((z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to (z \in y \leftrightarrow z \notin z)), \\
& \forall z((z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to (z \in y \leftrightarrow z \notin z)) \\
& \to (\forall z((z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))) \to \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)), && \text{(Ax3)} \\
& \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z), && \text{(MP)} \\
& (\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)) \\
& \to (\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to \neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))), && (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi), \text{(Ax1)} \\
& \neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to \neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)), && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

By the generalization metatheorem,

$$\begin{aligned}
\{\forall z(z \in c)\} \vdash & \forall y(\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to \neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))), \\
& \forall y(\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to \neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))) \\
& \to (\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to (\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)))), && \text{(Ax3)} \\
& (\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)) \to (\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))), && \text{(MP)} \\
& (\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \to \forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z))) \\
& \to (\neg\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \neg\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)), && (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi), \text{(Ax1)} \\
& \neg\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \neg\forall y\neg\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z), && \text{(MP)} \\
& \equiv \exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)
\end{aligned}$$

We define *Cmpr* to be the collection of sentences in the comprehension schema in the restricted language without the variable c. Then

$$\begin{aligned}
\text{Cmpr} \vdash & \forall x\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z)), \\
& \forall x\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin z)) \to \exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in c \wedge z \notin z), && \text{(Ax2)} \\
& \exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)). && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

By metatheorem 3.11(i),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cmpr} \cup \{\forall z(z \in c)\} \vdash & \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)), \\
& \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in c \wedge z \notin z)) \to \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z), \\
& \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z). & \text{(MP)}
\end{aligned}$$

Restricting our language to one that does not contain the constant c, the existential instantiation metatheorem shows

$$\mathrm{Cmpr} \cup \{\exists x \forall z(z \in x)\} \vdash \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z).$$

Let

$$\rho' \equiv \neg \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z),$$

the result of replacing all bound occurrences of s and x in

$$\rho \equiv \neg \exists s \forall x(x \in s \leftrightarrow x \notin x)$$

by y and z respectively. Then because $\vdash \rho$, Corollary 3.13 shows that

$$\vdash \rho'. \tag{4}$$

By the deduction metatheorem,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cmpr} \vdash & \exists x \forall z(z \in x) \to \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z), \\
& (\exists x \forall z(z \in x) \to \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)) \\
& \to (\neg\neg \exists x \forall z(z \in x) \to \neg\neg \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z)), & (\phi \to \psi) \to (\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi), \text{(Ax1)} \\
& \neg\neg \exists x \forall z(z \in x) \to \neg\neg \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) & \text{(MP)} \\
& \equiv \neg\sigma \to \neg\neg \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \notin z) \\
& \equiv \neg\sigma \to \neg\rho'.
\end{aligned}$$

It can be seen from MP that

$$\mathrm{Cmpr} \cup \{\neg\sigma\} \vdash \neg\rho'.$$

But also, from metatheorem 3.11(i),

$$\mathrm{Cmpr} \cup \{\neg\sigma\} \vdash \rho'.$$

Then by the contradiction metatheorem,

$$\mathrm{Cmpr} \vdash \sigma.$$